

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. με $V \neq \{0\}$ נתון. δίδεται.

Έστω W υπόχωρος του V . ορίζουμε

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ για κάθε } w \in W\}$$

Πρόταση

- 1) $W^\perp$ υπόχωρος του V
- 2) $W^\perp, W$ κάθετοι υπόχωροι.
- 3) Το άθροισμα $W + W^\perp$ είναι ολόκληρο και επιπλέον είναι 1ος μ.β.ν. Το $W^\perp$ ορίζεται το ορθόγωνιο συμπλήρωμα του W στο V

Απόδειξη

- 1) Φανερά $0_V \in W^\perp$ γιατί $\langle 0_V, w \rangle = 0$ για κάθε $w \in W$.
Έστω $v_1, v_2 \in W^\perp$. Τότε $\langle v_1, w \rangle = \langle v_2, w \rangle = 0$ για κάθε $w \in W$.

$$\text{Άρα, } \langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle = 0 + 0 = 0$$

Συνεπώς, $v_1 + v_2 \in W^\perp$. Έστω $v \in W^\perp, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{Τότε } \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \alpha \cdot 0 = 0 \text{ για κάθε } w \in W.$$

Συμπέρασμα, $W^\perp$ υπόχωρος του V .

- 2) Προφανές από τον ορισμό του $W^\perp$

- 3) Από 2), $W, W^\perp$ κάθετοι και το άθροισμα καθετών είναι ολόκληρο. Έστω ότι το άθροισμα $W + W^\perp$ είναι ολόκληρο.

Έστω $v \in V$. Συμβολίζουμε $\pi: V \rightarrow W$ την ορθογώνια προβολή του V στο W .

$$\text{Έχουμε } v = \pi(v) + (v - \pi(v)). \text{ Αλλά } \pi(v) \in W$$

$$\text{και } v - \pi(v) \perp W \Rightarrow v - \pi(v) \in W^\perp.$$

$$\text{Συνεπώς, } V = W + W^\perp$$

Πρόταση

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. πεπερασμένου διαστάσης με $V \neq \{0\}$ και W γραμμικός υπόχωρος του V . Υποθέτουμε Z γραμ. υπόχωρος του V με τις ιδιότητες:

$$Z \text{ κάθετος στο } W \text{ και } V = W + Z$$

$$\text{Τότε } Z = W^\perp$$

Απόδειξη

Λογισμός 1. $W^\perp \subseteq Z$. Έστω $v \in W^\perp$. Αφού $V = W + Z$

υπάρχει $w \in W, z \in Z$ με $v = w + z \Rightarrow w = v - z$.

$$\text{Αρα, } \langle w, w \rangle = \langle w, v - z \rangle = \langle w, v \rangle - \langle w, z \rangle = 0_{\mathbb{R}} \\ \Rightarrow w = 0_V$$

(αφού $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. Αρα, $v = z \in Z$)

Με το ίδιο επιχείρημα $Z \subseteq W^\perp$. Αρα $Z = W^\perp$

Συμπλήρωση Ορθοκανονικής Βάσης

Αλγόριθμος

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. πεπερ. διαστάσης με $V \neq \{0\}$ και $e_1, \dots, e_r \in V$ με τις ιδιότητες

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1_{\mathbb{R}} & \text{αν } i = j \\ 0_{\mathbb{R}} & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad (*)$$

Ο αλγόριθμος επεκτείνει τα $e_1, \dots, e_r$ σε ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ του V

Βήμα 1°

Η $(*) \Rightarrow e_1, e_2, \dots, e_r$ γραμ. ανεξάρτητα.

Επεκτείνουμε (δες Γραμ. Αξιομ. 1) σε βάση

$e_1, e_2, \dots, e_r, g_{r+1}, g_{r+2}, \dots, g$ του V

Βήμα 2°

Εφαρμόζουμε την βάση $e_1, e_2, \dots, e_r, g_{r+1}, g_{r+2}, \dots, g$ της V μέθοδο Gram-Schmidt.

Τα $e_1, \dots, e_r$ δεν ανήκουν και καταλήγουμε σε ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ της V .

Ορισμός: Οι υπόχωροι W_1, W_2 της $X \in \Gamma(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγονται ορθοσυμπληρωματικοί, αν W_1, W_2 κάθετοι και $V = W_1 + W_2$
(Τότε, αναμφισβητικά $W_2 = W_1^\perp$).

Αλγόριθμος υποχώρου $W^\perp$ (χωρίς βάση υποσπίματος)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ πεπερ. διάστασης με $V \neq \{0\}$ και W υπόχωρος της V . Ο αλγόριθμος υπολογίζει το $W^\perp$.

Βήμα 1° : Έστω $g_1, \dots, g_r$ βάση της W .
Με Gram-Schmidt βρίσκουμε ορθοκανονική βάση $e_1, e_2, \dots, e_r$ της W .

Βήμα 2° : Ενεκτείνουμε με χρήση της προηγούμενου αλγόριθμου την $e_1, \dots, e_r$ σε βάση $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n$ της V .

Βήμα 3° : Λόγω $W^\perp = \langle e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n \rangle$

Φύλλο 5

Άσκηση 1: Έστω $V = \mathbb{R}^4$, με ορισμένες εσωτερικά γινόμενα $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, -1, 0, 2)$.

Έστω $W = \langle u_1, u_2 \rangle$ ο υπόχωρος που παράγεται από τα u_1, u_2 .
Βρείτε ορθοκανονική βάση του W και αναπληρώστε την
σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

Λύση

Υπενθύμιση $\langle (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$

Βήμα 1°: u_1, u_2 γραμ. ανεξάρτητα γιατί

$$\text{βαθμίδα} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Άρα, βάση του W θέτουμε $g_1 = u_1$, $g_2 = u_2$

Βήμα 2°: Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στην βάση $g = (g_1, g_2)$ του W .

$$\text{Θέτουμε } h_1 = g_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} \cdot h_1 = (0, -1, 0, 2) - \frac{(-1)}{2} (1, 1, 0, 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε } e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, \frac{-\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Τότε e_1, e_2 ορθοκανονική βάση του W .

Παράδειγμα 3^ο : (Γραμμική Άλγεβρα 1)

Ενεργείουμε το γραμμικά ανεξάρτητα e_1, e_2
 σε βάση e_1, e_2, g_3, g_4 του $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b' \end{bmatrix} \leftarrow \text{κρίνοντας με } a \neq 0$$

Συνεπώς, $e_1, e_2, g_3 = (0, 0, 1, 0), g_4 = (0, 0, 0, 1)$ βάση του $\mathbb{R}^4$

Παράδειγμα 4^ο : Gram-Schmidt given βάση e_1, e_2, g_3, g_4

$$h_1 = g_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)$$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} \cdot h_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} \cdot h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} \cdot h_2 = g_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$h_4 = g_4 - \frac{\langle g_4, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} \cdot h_1 - \frac{\langle g_4, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} \cdot h_2 - \frac{\langle g_4, h_3 \rangle}{\langle h_3, h_3 \rangle} \cdot h_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_4 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$$

Επομένως, η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ που ενεργείει αν e_1, e_2 είναι

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right),$$

$$\frac{h_3}{\|h_3\|} = (0, 0, 1, 0) \quad \frac{h_4}{\|h_4\|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$$

Συνεπώς, $W^\perp = \langle (0, 0, 1, 0), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) \rangle$

(Παραπάνω)
Άσκηση 2 : $V = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$
 $W = \langle x, x^2, x^3 \rangle$

Βρείτε ορθοκανονική βάση του W .

Λύση

Βήμα 1° : Θετουμε $g_1 = x$, $g_2 = x^2$, $g_3 = x^3$
 Τα g_1, g_2, g_3 είναι γραμ. ανεξάρτητα, γιατί
 είναι υποβλητός το κανονικό βάσης του $\mathbb{R}_3[X]$

Άρα, είναι βάση του W .

Βήμα 2° : Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στο g_1, g_2, g_3
 $h_1 = g_1$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} h_2$$

$$\text{Έχουμε } \langle h_1, h_1 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = [x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle g_2, h_1 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα, } h_2 = x^2 - \frac{3x}{4}$$

$$\text{Νερά τις πράξεις : } h_3 = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x$$

$$\text{Άρα, } \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{h_2}{\|h_2\|} = \dots$$

$$\frac{h_3}{\|h_3\|} = \dots$$

ορθοκανονική βάση του W .

Άσκηση 4: $\mathbb{R}^4$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο

$$W_1 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$$

$$W_2 = \{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \}$$

Δείξε ότι W_1, W_2 ορθογώνιες υποχώροι

Λύση

Θα δ.ο. $W_1 \perp W_2$ και ότι $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } (a_1, a_2, a_3, a_4) &\in W_1 & (\text{Απο } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4) &\in W_2 & (\text{Απο } b_1 = b_2 = b_3 = b_4) \end{aligned}$$

$$\langle (a_1, \dots, a_4), (b_1, \dots, b_4) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 + a_4 b_1 = b_1 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = b_1 \cdot 0 = 0$$

Τώρα θα δείξουμε $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$

(b_1, b_2, b_3, b_4)
"

Ανάλυση: Έστω $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4$ και $(c_1, \dots, c_4) = (a_1, \dots, a_4) + (b_1, \dots, b_4)$
με $(a_1, \dots, a_4) \in W_1$

$$(b_1, \dots, b_4) \in W_2. \text{ 'Απο } \sum_{i=1}^4 c_i = \sum_{i=1}^4 a_i + \sum_{i=1}^4 b_i = 0 + 4b_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = \left(\sum_{i=1}^4 c_i \right) / 4$$

$$\text{Τότε } (c_1, c_2, c_3, c_4) = (b_1, b_1, b_1, b_1) + (c_1 - b_1, c_2 - b_1, c_3 - b_1, c_4 - b_1)$$

και $(b_1, b_1, b_1, b_1) \in W_2$ και $(c_1 - b_1, c_2 - b_1, c_3 - b_1, c_4 - b_1) \in W_1$

$$\text{γιατί } (c_1 - b_1) + (c_2 - b_1) + (c_3 - b_1) + (c_4 - b_1) = (c_1 + \dots + c_4) - 4b_1 = 0$$

$$\text{Απο } \mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$$

Άσκηση 3 : $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ άνωτέρω πρόβλενο
 $W_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \}$

$$W_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{matrix} \}$$

- Βρείτε α) ορθοκανονικές βάσεις των W_1, W_2
β) την ορθογώνια προβολή του $(1, 1, 1)$ στα W_1

Λύση

Βήμα 1^ο : Έψαξα βάσεις των W_1 και W_2 (παρ. I)

Μετά τους υπολογισμούς έβγαλε :

$$\circ W_1 \text{ έχει βάση } g_1 = (1, 1, 0), g_2 = (1, 0, 1)$$

$$h_1 = g_1$$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$$

$$\text{Μετά τις πράξεις : } e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), e_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

ορθοκανονική βάση του W_1 .

Με παρόμοιους υπολογισμούς $W_2 = \langle (1, 1, 1) \rangle$

$$\text{με ορθοκανονική βάση } \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Έστω $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow W_1$ η ορθογώνια προβολή.

Από e_1, e_2 η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ έχουμε ότι
για $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\pi(a) = \langle a, e_1 \rangle e_1 + \langle a, e_2 \rangle e_2$$

$$\text{Τότε βλέπουμε } \pi((1, 1, 1)) = \langle (1, 1, 1), e_1 \rangle e_1 + \langle (1, 1, 1), e_2 \rangle e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$+ \langle (1,1,1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= (1,1,0) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \in W_1$$